Lec 10 洛必达 (L'Hospital) 法则及其应用

10.1 洛必达法则

定理 10.1 (0/0 型洛必达法则)

设 $f(x), g(x)$ 在 (a,b) 中可微, 且 $g'(x) \neq 0$, 而 $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$, 其中 $A \in R$ 或 $A = \infty$, 则 $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.

证明 由于 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$，因此我们不妨假设 $f(x_0) = g(x_0) = 0$，这样，函数 f 和 g 在 x_0 都连续。

设 x 是区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 中的任意一点 $(x \neq x_0)$，在以 x 和 x_0 为端点的闭区间上，f 和 g 满足 Cauchy 中值定理的一切条件，于是存在介于 x 和 x_0 之间的一点 ξ，使得

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

因为 $|\xi - x_0| < |x - x_0|$，所以当 $x \to x_0$ 时，$\xi \to x_0$。由定理的假设，即得到

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \to x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = l.$$

定理 10.2 ($*/\infty$ 型洛必达法则)

设 $f(x), g(x)$ 在 (a,b) 中可微, 且 $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} g(x) = 0$, 而 $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$, 其中 $A \in R$ 或 $A = \infty$, 则 $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.

证明 只证明 l 为实数的情况，$l = +\infty$ 或 $l = -\infty$ 的情况类似。由

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

知，对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta_1 > 0$，当 $x \in (x_0, x_0 + \delta_1)$ 时，有

$$l - \varepsilon < \frac{f'(x)}{g'(x)} < l + \varepsilon.$$

由 Cauchy 中值定理，对于 $[x, c] \subset (x_0, x_0 + \delta_1)$，存在 $\xi \in (x, c)$ 使得

$$\frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

因此，

$$l - \varepsilon < \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} < l + \varepsilon.$$

由于 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$，对于固定的 c，存在 $\delta_2>0$，使得当 $x\in(x_0,x_0+\delta_2)$ 时，

$$\left|\frac{g(c)}{g(x)}\right|<\varepsilon.$$

取 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$，于是，当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，从恒等式

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}\cdot\frac{g(x)-g(c)}{g(x)}+\frac{f(c)}{g(x)}$$

推导出

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-l\right|<(2+|\varepsilon|)\varepsilon.$$

由此证明了

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$$

同时，有

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$$

注 当 $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 仍然满足洛必达法则时, 可以继续使用洛必达法则. $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\cdots=\cdots$.

如 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^{2x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{2e^{2x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x}{4e^{2x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6}{8e^{2x}}=0$.

注 当 $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在且是振荡不存在时, $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$ 也可能存在, 此时洛必达法则不适用, 如 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x+\cos x}{x}=1$, 而 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x}$ 不存在.

也可以举例 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^2\sin 1/x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}x\sin 1/x=0$, 而 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2x\sin 1/x-\cos 1/x}{1}$ 不存在.

因此, 无论是 $0/0$ 型, 还是 $*/\infty$ 中, 若 $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 为振荡发散时, 则宜用别的方法计算 $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$, 洛必达法则此时不适用.

10.2 洛必达法则的应用举例

例 10.1 计算下列极限:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\frac{\pi}{2}-\arctan x)$;
2. $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\ln x}+\frac{1}{1-x}\right)$;
3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;
4. $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x$;
5. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$;

6. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^\alpha}{a^x}, a>1, \alpha>0.$
7. $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^m}{x^\alpha}, m>0, \alpha>0.$
8. $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^\alpha}, \alpha>0.$

证明

1. $\lim_{x\to+\infty} x(\frac{\pi}{2}-\arctan x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1.$
2. $\lim_{x\to1^+}\frac{1-x+\ln x}{(1-x)\ln x}=\lim_{x\to1^+}\frac{-1+\frac{1}{x}}{\frac{1-x}{x}-\ln x}=\lim_{x\to1^+}\frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}.$
3.
$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}&=\mathrm{e}^{\lim_{x\to0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2}}\\&=\mathrm{e}^{\lim_{x\to0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}}{2x}}\\&=\mathrm{e}^{\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^2\sin x}}\\&=\mathrm{e}^{\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3}}\\&=\mathrm{e}^{\lim_{x\to0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{6x^2}}\\&=\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}.\end{aligned}$$
4. $\lim_{x\to0^+}x^x=\lim_{x\to0^+}\mathrm{e}^{\ln x^x}=\mathrm{e}^{\lim_{x\to0^+}x\ln x}=\mathrm{e}^0=1.$
5. $\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{\sqrt{x}}}=\mathrm{e}^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}}=\mathrm{e}^0=1.$
6. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{a^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{a^x\ln a}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}}{a^x(\ln a)^2}=\cdots=0.$
7. $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^m}{x^\alpha}=\lim_{x\to+\infty}\frac{m(\ln x)^{m-1}}{x^\alpha\alpha}=\lim_{x\to+\infty}\frac{m(m-1)(\ln x)^{m-2}}{x^\alpha(\alpha)^2}=\cdots=0.$
8. 这是数列极限，不是函数极限，不能直接洛，但是由 7 已知 $\lim_{x\to infty}\frac{\ln x}{n^\alpha}=0$ 和教材定理 **1.32** 可知，$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^\alpha}=0.$

作业 ex3.4:3,4,5(1)(12)(13)(14)(15);CH3:13.